Πανεπιστημιο Ιωαννινων
Σχολη θετικων επιστημων
Τμημα Μαθηματικων
Τομεας Αλγεβρας και Γεωμετριας

ευκλειδεια και μη ευκλειδειες γεωμετριες
διδασκων: Χρηστος Κ. Τατακης
υποδειξεις λυσεων των θεματων της
26.01.2016

ΘΕΜΑ 1. (2,5 μονάδες)

(1) Να αποδειχθεί ότι το αξίωμα της παραλληλίας είναι ισοδύναμο με την πρόταση *το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.*

Λύση. Θεωρία

(2) Να αποδειχθεί ότι στην υπερβολική γεωμετρία, δύο όμοια τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση. Θεωρία

(3) Να αποδειχθεί ότι στην υπερβολική γεωμετρία, δύο τρίγωνα είναι δυνατόν να έχουν ίδια βάση, ίδιο ύψος αλλά διαφορετικά εμβαδά.

Λύση. Θεωρία

ΘΕΜΑ 2. (1,5 μονάδες)

(1) Να δειχθεί ότι στην απόλυτη γεωμετρία, ένα τετράπλευρο Saccheri είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση. Θεωρούμε το τετράπλευρο Saccheri ΑΒΓΔ, όπου ΑΔ και ΒΓ κάθετες στην ΑΒ (από ορισμό). Αρκεί να δείξουμε ότι ΑΔ, ΒΓ παράλληλες και ΑΒ, ΓΔ παράλληλες. Οι πρώτες είναι παράλληλες ως κάθετες στην ίδια ευθεία. Για τις ΑΒ, ΓΔ: Υποθέτουμε αντίθετα ότι δεν είναι παράλληλες. Έστω Ε το σημείο τομής τους. Τότε η παραπληρωματική γωνία της Δ και η παραπληρωματική γωνία της Γ θα είναι ίσες (αφού ΑΒΓΔ τετράπλευρο Saccheri) και ταυτόχρονα θα είναι: η πρώτη μεγαλύτερη της μιας ορθής και η δεύτερη μικρότερη της μιας ορθής (από πρόταση ότι η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι εσωτερικές). Αδύνατο και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

(2) Στην απόλυτη γεωμετρία θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να δειχθεί ότι: $AM < \dfrac{AB + A\Gamma}{2}$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των μηκών των διαμέσων ενός τριγώνου, είναι μικρότερο από την περίμετρο αυτού.

Λύση. Προεκτείνουμε την AM σε σημείο Δ, έτσι ώστε $AM = A\Delta$. Έπεται ότι $ABM = M\Gamma\Delta$ και άρα $AB = \Gamma\Delta$. Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ γνωρίζουμε ότι:

$$2AM = A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma + AB$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε. Για τη παρατήρηση στη συνέχεια, προσθέτουμε τις αντίστοιχες σχέσεις όλων των διαμέσων.

ΘΕΜΑ 3. (1,5 μονάδες)

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ μέσω της αντιστροφής C, με κέντρο αντιστροφής το σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ και ακτίνα αντιστροφής $\rho = 2$. Ως εφαρμογή αυτού, να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $x + 2y = 3$ ως προς τον κύκλο αντιστροφής C.

Λύση. Κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$x = \frac{4x'}{x'^2 + y'^2}, y = \frac{4y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν $\beta = 0$, τότε προκύπτει η ίδια ευθεία. Αν $\beta \neq 0$, τότε προκύπτει κύκλος. Για την εφαρμογή, αντικαθιστούμε τις παραμέτρους $\alpha = -\dfrac{1}{2}, \beta = \dfrac{3}{2}$ στην εξίσωση κύκλου που βρήκαμε παραπάνω.

ΘΕΜΑ 4. (2,5 μονάδες)

(1) Θεωρούμε την Υ-ευθεία $(\epsilon) : (x-3)^2 + y^2 = 4$ στο υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$ και ας είναι $z = 2+3i$ Υ-σημείο αυτού. Να βρεθούνε δύο διαφορετικές Υ-ευθείες που διέρχονται από το z και είναι παράλληλες προς την (ϵ). Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε ένα Υ-παραλληλόγραμμο.

Λύση. Λαμβάνουμε τα σημεία που τέμνει η δοθείσα Υ-ευθεία τον ορίζοντα. Δύο Υ-ευθείες παράλληλες με τη δοθείσα, είναι αυτές που διέρχονται από το κάθε σημείο με το z (αποδεικνύεται παρατηρώντας τη διάταξη των σημείων τομής των ευθειών αυτών με τον ορίζοντα). Για να ορίσουμε ένα παραλληλόγραμμο, παίρνουμε δύο από αυτές τις ευθείες και δύο ευθείες κάθετες στον ορίζοντα (που τέμνουν την αρχική Υ-ευθεία).

(2) Να προσδιοριστεί ο Υ-κύκλος με διάμετρο το Υ-ευθύγραμμο τμήμα AB, όπου $A = 1+i$ και $B = 2+2i$ είναι Υ-σημεία του υπερβολικού επιπέδου $\mathbb{H}^2$.

Λύση. Ο ζητούμενος Υ-κύκλος έχει κέντρο το Υ-μέσο του AB (έστω αυτό O). Η ακτίνα του κύκλου προσδιορίζεται αν βρούμε την Υ-απόσταση του Υ-ευθυγράμμου τμήματος AO.

ΘΕΜΑ 5. (2 μονάδες)

Να κατασκευαστεί Υ-ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου οι κορυφές να είναι Υ-σημεία της μορφής $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{H}^2$, όπου x_1, x_2, x_3 διαφορετικά ανά δύο. Στη συνέχεια, να υπολογιστεί το μήκος της υποτείνουσας του Υ-τριγώνου $P_1P_2P_3$.

Λύση. 1η λύση) Έστω μια οποιαδήποτε Υ-ευθεία της μορφής $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$ με $(x_0, 0)$ το κέντρο του ημικυκλίου στον ορίζοντα. Είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής. Φέρουμε μια τυχούσα εφαπτομένη στη παραπάνω Υ-ευθεία, όχι παράλληλη με τον ορίζοντα και έστω K το σημείο επαφής και O το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον ορίζοντα. Τότε αν πάρουμε κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα OK αυτός τέμνει ορθογώνια τον αντίστοιχο κύκλο της Υ-αρχικής μας ευθείας. Στο σημείο τομής τους, έχουμε και τη ζητούμενη ορθή γωνία του τριγώνου. Λαμβάνοντας δύο οποιαδήποτε άλλα σημεία των Υ-ευθειών, έχουμε ένα Υ ορθογώνιο τρίγωνο. Για το μήκος της υποτείνουσας, υπολογίζουμε την Υ-απόσταση των σημείων που επιλέξαμε (απέναντι από την ορθή γωνία του τριγώνου).

2η λύση) Γνωρίζουμε ότι κάθε κύκλος που διέρχεται από δύο αντίστροφα σημεία (ως προς κάποια αντιστροφή), τέμνει τον κύκλο αντιστροφής ορθογώνια. Λαμβάνουμε Υ-ευθεία (μορφής ημικυκλίου), θεωρούμε τον αντίστοιχο κύκλο, ως κύκλο αντιστροφής και εφαρμόζουμε τη προηγούμενη πρόταση. Προσοχή, πρέπει και τα δύο κέντρα των κύκλων να βρίσκονται στον ορίζοντα, διαφορετικά δε θα είναι Υ-ευθείες.

---

* Οι λύσεις αυτές δεν είναι μοναδικές. Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι επίλυσης όλων των παραπάνω θεμάτων.

Χρήστος Κ. Τατάκης
